Логико-вероятностное управление риском портфеля ценных бумаг

Валентин Шоколов

Институт проблем машиноведения, РАН
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: risk@sapr.ipme.ru

Аннотация

Излагается методика ЛВ-управления риском портфеля ценных бумаг (*Logic and Probabilistic Portfolio Risk Analysis and Management , LP-PRAM*) при дискретных распределениях доходности активов. Приводятся логические и вероятностные модели риска. Формулируются задачи выбора оптимального портфеля для случаев зависимой и зависимой от фактора доходности активов. Вводятся новые характеристики риска портфеля: число состояний портфеля и энтропия доходности "хвоста" распределения, вклады градаций доходности активов в допустимую доходность и риск портфеля. Описывается методика анализа и управления риском инвестиционного портфеля по *LP-PRAM*. Приводятся результаты исследований и оценки эффективности методики на реальных данных.

Ключевые слова: *логика, вероятность, модель, риск, выбор, анализ, управление, портфель активов, дискретные распределения, ортогонализация.*

1 Введение

В 1952 г. Г.Марковиц опубликовал фундаментальную работу, с которой берет начало современная теория портфеля [1]. В основе его методики лежит предположение о том, что доходности ценных бумаг и портфеля, состоящего из них, являются случайными величинами и распределены по нормальному закону. Методика выбора оптимального портфеля имела ряд недостатков, одним из которых было использование кривых безразличия, индивидуальных для каждого инвестора. Впоследствии широкое распространение получила методика *VaR*. Она используется для выбора оптимального портфеля при заданном риске. Основой методики было все то же предположение о распределении доходности по нормальному закону [1, 2]. Однако эта гипотеза не выполняется на практике, что приводит к неточности результатов. В большом числе работ по *VaR* исследуется важнейшая часть распределения доходности портфеля: "хвост", для которого вводят специальные распределения [3–5].

В работах [6, 7]впервые предложена теория и технология логико-вероятностного (ЛВ) выбора и анализа риска портфеля ценных бумаг и изложены результаты расчетных исследований при замене нормальных законов распределения независимой доходности активов дискретными распределениями. Эти работы имели большое теоретическое значение по обоснованию ЛВ-подхода и использованию ЛВ-исчисления к выбору портфеля активов. В развитие этих работ, ниже излагаются методики и результаты ЛВ-моделирования и анализа риска портфеля ценных бумаг с учетом зависимости доходности активов.

2 Логико-вероятностное моделирование портфеля активов

2.1 Основные положения

Исходные данные. Исходными для расчетов являются статистические данные по доходности активов (Таблица 1).

Таблица 1. Состояния и значения доходности активов

Номер состояния	Актив 1, доходность Z_1	$\cdots$	Актив j, доходность Z_j	$\cdots$	Актив n, доходность Z_n
1	Z_{11}	$\cdots$	Z_{j1}	$\cdots$	Z_{n1}
2	Z_{12}	$\cdots$	Z_{j2}	$\cdots$	Z_{n2}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
i	Z_{1i}	$\cdots$	Z_{ji}	$\cdots$	Z_{ni}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
N	Z_{1N}	$\cdots$	Z_{jN}	$\cdots$	Z_{nN}

Таблица включает в себя доходность активов 1, 2, ..., n в определенные моменты времени, интервал между которыми может быть равен дню, месяцу, неделе и т.д. Состояния портфеля пронумерованы от 1 до N. Доходность активов портфеля $Z_1, \ldots, Z_j, \ldots, Z_n$ являются системой случайных величин, которая определяет доходность портфеля Y. Последняя, как функция случайных величин, имеет многомерное распределение.

Дискретизация. Введем группы несовместных событий (ГНС) и события-градации. Для перехода к дискретным распределениям разобьем диапазоны изменения доходности активов на интервалы (Рисунок 1),

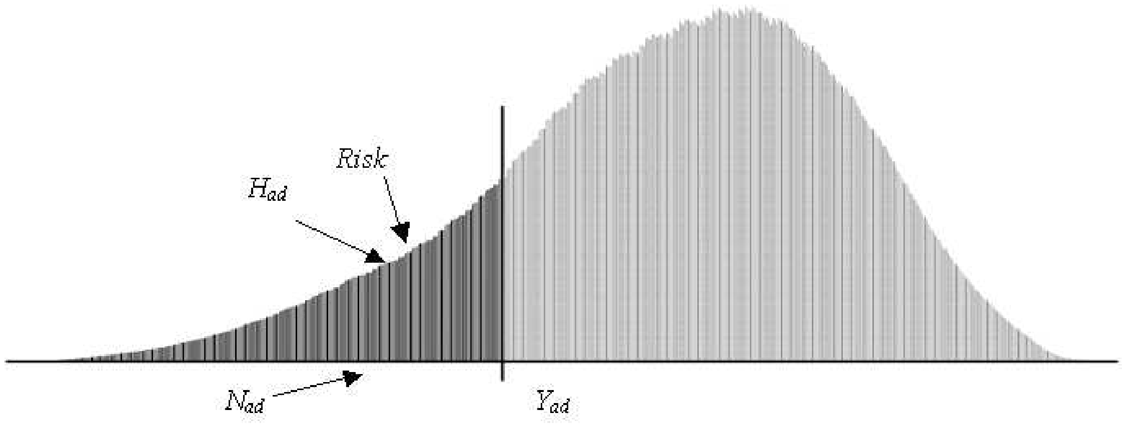

Рис. 1: Дискретное распределение доходности

где Y_{ad} допустимая доходность (убыток) портфеля ценных бумаг, $Risk$ суммарная вероятность того, что доходность портфеля примет значение ниже (выше) допустимой доходности (убытка) Y_{ad}, N_{ad} число состояний портфеля в "хвосте" распределения, H_{ad} энтропия доходности "хвоста"распределения.

Число интервалов r_j в разбиении доходности различных активов j в общем случае может быть разное. Пронумерованные интервалы для каждого из них рассматриваются как градации актива Z_{jr_j}, r_j=1, 2, ..., N_j. Таким образом, интервалам соответствуют случайные события-градации, образующие ГНС. Сумма вероятностей событий-градаций в ГНС равна 1.

Каждое событие-градация характеризуется доходностью (средней доходностью на интервале) и вероятностью его появления в Таблице 1:

$$P_{jr_j} = N_{jr_j}/N, \tag{1}$$

где N_{jr_j} - число попаданий доходности актива j в интервал r_j, N - размер статистики.

2.2 Портфель активов с зависимой доходностью

Сохраним обозначения Таблицы 1. Каждому активу j и каждому интервалу доходности r_j сопоставим логическую переменную Z_j и случайное событие-градацию Z_{jr_j} соответственно. Для отдельного актива эти события-градации составляют ГНС. На основе Таблицы 1 строится таблица, в каждой клетке которой содержатся события-градации (Таблица 2).

Таблица 2. Состояния и градации доходности активов

Номера состояний	Актив 1, событие-градация	...	Актив j, событие-градация	...	Актив n, событие-градация
1	...	...	...	...	...
2	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
i	...	...	Z_{jr_j}	...	...
...	...	...	...	...	...
N	...	...	...	...	...

Как и в случае с независимой доходностью активов, портфель может иметь следующее число разных состояний:

$$N_{max} = N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_j \cdot \ldots \cdot N_n. \tag{2}$$

Доходность состояния i определяется, как и в работах [1, 6–8], по формуле (3).

$$Y_i = x_1 \cdot Z_{1r_1} + \ldots + x_j \cdot Z_{jr_j} + \ldots + x_n \cdot Z_{nr_n},\ i = 1, 2, \ldots, N;\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Для вычисления вероятности каждого состояния портфеля нужно рассмотреть n-мерную систему случайных величин. Для простоты рассмотрим случай портфеля из двух активов. Совместное распределение доходности двух активов представим в виде Таблицы 3.

Таблица 3. Совместное распределение доходности

	Z_{21}	...	Z_{2r_2}	...	Z_{2N_2}
Z_{11}	P_{11-21}	...	P_{1r_1-21}	...	P_{1N_1-21}
...	...	...	...	...	...
Z_{1r_1}	P_{11-2r_2}	...	$P_{1r_1-2r_2}$	...	$P_{1N_1-2r_2}$
...	...	...	...	...	...
Z_{1N_1}	P_{11-2N_2}	...	$P_{1r_1-2N_2}$	...	$P_{1N_1-2N_2}$

В этой таблице каждой ячейке соответствует отдельное состояние портфеля. Как уже было сказано ранее, эти состояния образуют ГНС, и сумма их вероятностей равна 1. Вероятность (или частота) i-состояния портфеля определяется по формуле (4).

$$P_{1r_1-2r_2} = N_{1r_1-2r_2}/N, \tag{4}$$

где $N_{1r_1-2r_2}$ - число появлений набора событий-градаций Z_{1r_1} и Z_{1r_2}.

Для портфеля из трех активов Таблица 3 будет иметь форму параллелепипеда в трехмерном пространстве. Если же активов будет n, то она примет форму n-мерного параллелепипеда. За вероятности состояний портфеля примем частоты их появления. При этом вероятность i-состояния портфеля определяется по формуле (5).

$$P_{1r_1-2r_2...nr_n} = N_{1r_1-2r_2...nr_n}/N, \tag{5}$$

где N - число состояний портфеля; $N_{1r_1-2r_2...nr_n}$ - число состояний портфеля попавших в ячейку $1r_1 - 2r_2...nr_n$.

При использовании формулы (5) вероятности только части возможных состояний портфеля будут отличны от 0. Все остальные состояния, вероятности которых равны 0, можно считать невозможными. Таким образом, имеется ограниченное множество состояний портфеля. Можно рассчитать доходности и вероятности всех состояний, встречающихся в Таблица 2. Отсортировав их по возрастанию, получим распределение доходности портфеля (Таблица 4).

Таблица 4. Распределение доходности портфеля Y

Y	Y_1	Y_2	$\cdots$	Y_i	$\cdots$	Y_N
P	P_1	P_2	$\cdots$	P_i	$\cdots$	P_N

Совместное распределение содержит в себе всю информацию о зависимости между доходностью активов. В этом состоит его достоинство, однако у него есть недостатки. Оно предоставляет информацию не о всех состояниях портфеля, а только о тех, которые встречались в таблице статистических данных. Для того чтобы распределение портфеля было достоверным необходимо накопить информацию за достаточно большой период времени, что далеко не всегда представляется возможным. Это позволяет предположить, что данная методика не подходит, для моделирования распределения доходности портфеля для больших горизонтов инвестирования. Решить указанную проблему можно описанным ниже способом.

2.3 Портфель с доходностью активов, зависящей от внешнего фактора

Примем следующее допущение: доходности ценных бумаг не зависят друг от друга, но все зависят от какого либо внешнего фактора, например индекса мирового рынка. Для того, чтобы можно было проводить расчеты, необходима информация не только по ценам активов, но также об изменении внешнего фактора параллельно с ценами активов. Таким фактором может быть, например, какой-либо индекс фондового рынка, или доходность какой-то хорошо известной ценной бумаги. Тогда можно отслеживать его доходность в процентах параллельно с доходностью активов. Диапазон изменения внешнего фактора также разбивается на градации. Исходные данные представлены в виде таблицы статистических данных, подобной Таблице 1. В последнем столбце содержатся значения доходности, интересующего нас фактора. По этой таблице строится новая таблица, подобная Таблица 2, в каждой клетке которой уже содержатся события-градации. Построим условные распределения доходности активов относительно доходности фактора f. Для актива j такие распределения показаны в Таблице 5.

Сумма вероятностей в каждом столбце будет равна 1:

$$\sum_{r_j=1}^{N_j} P_{jr_j-f_k} = 1, \ r_j = 1, \ 2, \ \dots, \ N_j; \ k = 1, \ 2, \ \dots, \ F.$$

Таблица 5. Условные распределения доходности актива

	f_1	$\cdots$	f_k	$\cdots$	f_F
Z_{j1}	P_{j1-f_1}	$\cdots$	P_{j1-f_k}	$\cdots$	P_{j1-f_F}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
Z_{jr_j}	$P_{jr_j-f_1}$	$\cdots$	$P_{jr_j-f_k}$	$\cdots$	$P_{jr_j-f_F}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
Z_{jN_j}	$P_{jN_j-f_1}$	$\cdots$	$P_{jN_j-f_k}$	$\cdots$	$P_{jN_j-f_F}$

Таблица 6. Распределение доходности фактора

F	f_1	f_2	$\cdots$	f_k	$\cdots$	f_F
P	P_1	P_2	$\cdots$	P_k	$\cdots$	P_F

При этом вероятность $P_{jr_j-f_k}$ - частота появления в статистических данных градации Z_{jr_j} актива j при условии, что фактор f имеет градацию f_k:

$$P_{jr_j-f_k} = P(Z_j = Z_{jr} \mid f = f_k). \tag{6}$$

Из статистики определяем вероятности состояний доходности фактора f и заносим в Таблицу 6.

Вероятность P_k есть частота градации f_k фактора f в статистических данных:

$$P_k = N_k/N, \tag{7}$$

где N_k - количество появлений градации f_k фактора f; N - количество рассматриваемых состояний.

События-градации $f_1, f_2, \ldots, f_F$ составляют ГНС, и для них выполняется условие:

$$\sum_{k=1}^{F} P_k = 1.$$

Логика. Запишем Л-функцию, определяющую все состояния портфеля:

$$Y = Y_1 \ \vee \ Y_2 \ \vee \ \ldots \ \vee \ Y_i \ \vee \ \ldots \ \vee Y_N. \tag{8}$$

Она идентична Л-функции для портфеля с независимой доходностью активов [6, 7]. Теперь запишем логическую функцию состояния i:

$$\begin{aligned} Y_i = {} & [(Z_1 \wedge \ldots \wedge Z_j \wedge \ldots \wedge Z_n) \mid f = f_1] \vee \ldots \\ & [(Z_1 \wedge \ldots \wedge Z_j \wedge \ldots \wedge Z_n) \mid f = f_k] \vee \ldots \\ & [(Z_1 \wedge \ldots \wedge Z_j \wedge \ldots \wedge Z_n) \mid f = f_F]. \end{aligned} \tag{9}$$

Все состояния портфеля ортогональны, так как каждое из них характеризуется уникальным набором градаций активов, которые составляют ГНС. $Y_i \wedge Y_{i+1} = 0$, ибо $Z_j \wedge \overline{Z_j} = 0$.

Каждое из состояний портфеля составное. Его части представляют также состояния доходности портфеля, но при разных градациях фактора f. эти части ортогональны друг другу, так как $f_1, f_2, \ldots, f_F$ ортогональны, ибо они составляют ГНС: $f_k \wedge f_{k+1} = 0$.

Вероятности состояний. Свойство ортогональности позволяет нам перейти от функций алгебры логики к вероятностным полиномам. Запишем формулу вероятности состояния портфеля i:

$$\begin{aligned} P_i = {} & (P_{1r_1-f_1} \cdot \ldots \cdot P_{jr_j-f_1} \cdot \ldots P_{nr_n-f_1}) \cdot P_1 + \ldots \\ & (P_{1r_1-f_k} \cdot \ldots \cdot P_{jr_j-f_k} \cdot \ldots P_{nr_n-f_k}) \cdot P_k + \ldots \\ & (P_{1r_1-f_F} \cdot \ldots \cdot P_{jr_j-f_F} \cdot \ldots P_{nr_n-f_F}) \cdot P_F, \end{aligned} \tag{10}$$

Таблица 7. Распределения доходности акций РАО ЕЭС (условные и безусловное)

$UESR, Z1$	$f{=}f_1 \vee f_2 \vee \ldots \vee f_7$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
Z_{11}	0.010	0.500	0.167	0.000	0.009	0.000	0.000	0.000
Z_{12}	0.033	0.500	0.167	0.097	0.022	0.011	0.000	0.000
Z_{13}	0.174	0.000	0.000	0.274	0.174	0.119	0.000	1.000
Z_{14}	0.509	0.000	0.500	0.468	0.537	0.467	0.000	0.000
Z_{15}	0.203	0.000	0.167	0.113	0.202	0.278	0.500	0.000
Z_{16}	0.054	0.000	0.000	0.048	0.040	0.108	0.000	0.000
Z_{17}	0.016	0.000	0.000	0.000	0.015	0.028	0.500	0.000

где $r_1 \in \{1, N_1\}$; $r_j \in \{1, N_j\}$; $r_n \in \{1, N_n\}$; k=1, 2, ..., F.

Для полного числа состояний портфеля выполняется условие:

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = 1.$$

Число всех возможных состояний портфеля, как и в других случаях равно (2). Доходности состояний портфеля определяются традиционным способом (3). Указанным способом можно определить все состояния портфеля. При возрастании числа рассматриваемых активов общее число состояний портфеля становится экспоненциально большим. Проблема вычислительной сложности решается применением метода Монте-Карло [6, 7].

2.4 Сопоставление способов моделирования

Сопоставим три описанных выше способа моделирования портфеля активов. Для наглядности будем моделировать портфель из двух активов. Выберем для этих целей обыкновенные акции российских компаний РАО ЕЭС и ЛУКОЙЛ. В качестве фактора выберем изменение индекса Российской Торговой Системы (РТС), который иллюстрирует общее направление движения российского рынка акций. Использована статистика по дневной доходности с октября 2002 по сентябрь 2004. Доходность рассчитывалась через цены закрытия по простой формуле без учета дивидендных выплат:

$$Z_t = \frac{C_t - C_{t-1}}{C_{t-1}} \cdot 100\ \%, \tag{11}$$

где Z_t - доходность текущего периода, C_t - цена закрытия текущего периода, C_{t-1} - цена закрытия предыдущего периода.

По статистике можно построить дискретные распределения доходности активов. Распределения доходности активов и фактора показаны на Рисунке 2.

Анализ гистограмм распределения анализируемых акций и фактора приводит к выводу, что они распределены по отличному от нормального закону распределения. Такие выводы были получены на основе теста Колмогорова-Смирнова для проверки формы распределения. При помощи этого теста было установлено, что распределения доходности акций и фактора не соответствуют нормальному закону.

Условные и безусловные распределения активов относительно фактора приведены в Таблице 7 и Таблице 8. Распределение доходности фактора дано в Таблице 9.

Доходности состояний портфеля одинаковы во всех трех случаях. Поэтому мы их исключим из рассмотрения. А значения вероятностей отличаются. Вероятности состояний доходности портфеля для всех трех случаев представлены в Таблице 10 - 12.

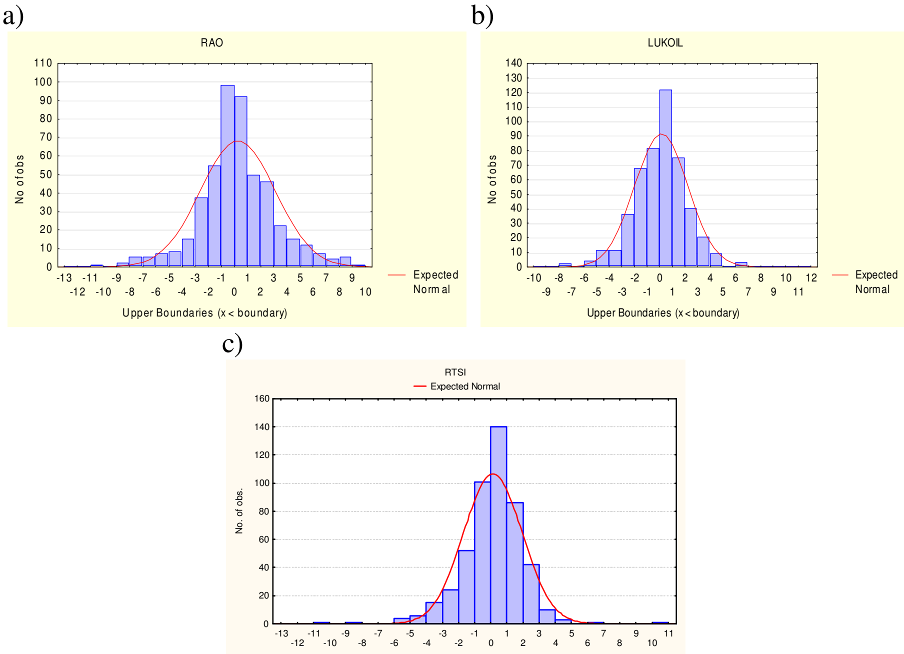

Рис. 2: Дискретные распределения доходности акций и фактора: a - РАО ЕЭС, b -ЛУКОЙЛ, c - индекс РТС

Таблица 8. Распределения доходности акций ЛУКОЙЛ (условные и безусловное)

LUKOIL, $Z2$	$f = f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_7$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
Z_{21}	0.016	0.500	0.333	0.016	0.012	0.000	0.000	0.000
Z_{22}	0.189	0.500	0.167	0.484	0.168	0.065	0.000	0.000
Z_{23}	0.571	0.000	0.167	0.387	0.661	0.424	0.000	1.000
Z_{24}	0.205	0.000	0.333	0.080	0.149	0.478	0.500	0.000
Z_{25}	0.014	0.000	0.000	0.016	0.009	0.032	0.000	0.000
Z_{26}	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.500	0.000
Z_{27}	0.002	0.000	0.000	0.016	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 9. Распределение доходности фактора

F	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
P	0.004	0.012	0.127	0.661	0.188	0.004	0.002

Таблица 10. Вероятности всех состояний портфеля без учета зависимости

	Z_{21}	Z_{22}	Z_{23}	Z_{24}	Z_{25}	Z_{26}	Z_{27}
Z_{11}	0.0002	0.0020	0.0058	0.0021	0.0001	0.0000	0.0000
Z_{12}	0.0005	0.0062	0.0187	0.0067	0.0005	0.0000	0.0000
Z_{13}	0.0028	0.0329	0.0996	0.0358	0.0025	0.0003	0.0003
Z_{14}	0.0083	0.0962	0.2907	0.1045	0.0073	0.0010	0.0010
Z_{15}	0.0033	0.0384	0.1160	0.0417	0.0029	0.0004	0.0004
Z_{16}	0.0008	0.0101	0.0305	0.0109	0.0007	0.0001	0.0001
Z_{17}	0.0003	0.0031	0.0093	0.0034	0.0002	0.0000	0.0000

Для сравнения результатов можно построить пузырьковые диаграммы, которые более наглядны. Площадь пузырька прямо пропорциональна величине вероятности того или иного состояния портфеля. Такие диаграммы представлены на Рисунке 3.

Таблица 11. Вероятности всех состояний портфеля с учетом зависимости

	Z_{21}	Z_{22}	Z_{23}	Z_{24}	Z_{25}	Z_{26}	Z_{27}
Z_{11}	0.0082	0.0020	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Z_{12}	0.0020	0.0225	0.0082	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Z_{13}	0.0020	0.0698	0.0903	0.0123	0.0000	0.0000	0.0000
Z_{14}	0.0041	0.0841	0.3367	0.0780	0.0061	0.0000	0.0000
Z_{15}	0.0000	0.0061	0.1170	0.0759	0.0041	0.0000	0.0000
Z_{16}	0.0000	0.0020	0.0144	0.0308	0.0041	0.0000	0.0020
Z_{17}	0.0000	0.0020	0.0041	0.0082	0.0000	0.0020	0.0000

Таблица 12. Вероятности всех состояний портфеля с учетом зависимости от фактора

	Z_{21}	Z_{22}	Z_{23}	Z_{24}	Z_{25}	Z_{26}	Z_{27}
Z_{11}	0.0017	0.0024	0.0044	0.0016	0.0000	0.0000	0.0000
Z_{12}	0.0020	0.0098	0.0154	0.0048	0.0004	0.0000	0.0001
Z_{13}	0.0019	0.0376	0.1012	0.0307	0.0023	0.0000	0.0005
Z_{14}	0.0074	0.0951	0.2964	0.1020	0.0071	0.0000	0.0009
Z_{15}	0.0025	0.0330	0.1159	0.0473	0.0031	0.0010	0.0002
Z_{16}	0.0004	0.0087	0.0287	0.0142	0.0010	0.0000	0.0000
Z_{17}	0.0001	0.0019	0.0085	0.0045	0.0002	0.0010	0.0000

a) b) c)

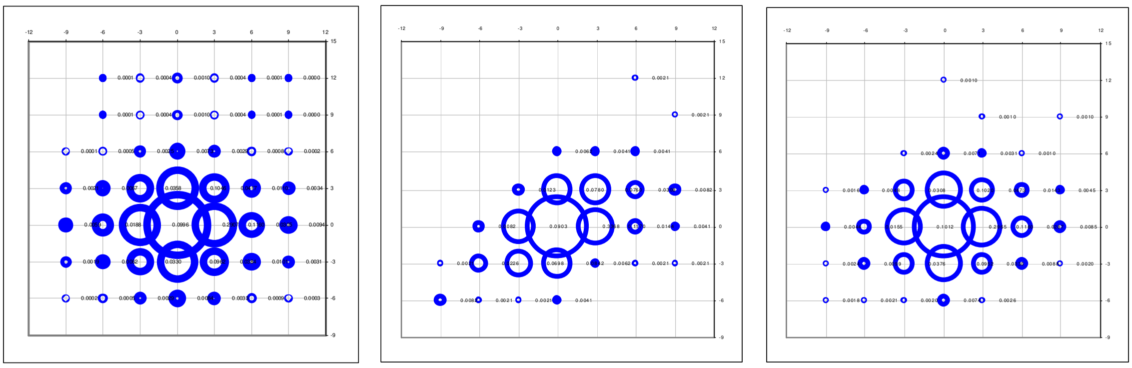

Рис. 3: Диаграммы вероятностей состояний портфеля: a - без учета зависимости активов, b - с учетом зависимости активов, c - с учетом зависимости активов от внешнего фактора

Из таблиц и диаграмм видно, что вероятности состояний доходности портфеля для всех трех случаев отличаются. При учете зависимости доходности активов между собой, вероятности значительной части состояний портфеля равны нулю (Таблица 11 и Рисунок 3,b). Из 49 возможных состояний портфеля нулевое значение приняли 22 состояния или 45 % всех возможных состояний. Это объясняется недостаточным размером статистики для расчета вероятностей состояний портфеля с учетом зависимости доходности активов между собой.

Для случая без учета зависимости доходности активов (Рисунок 3.a), нулевых вероятностей нет, есть только очень малые. Но данный случай плохо отражает действительность.

На Рисунке 3.c восстановлено 15 из 22 вероятностей состояний доходности портфеля, которые приняли нулевое значение на Рисунке 3.b. Это было достигнуто благодаря введению ортогональной логической функции, с помощью которой можно восстановить даже те состояния портфеля, которые не встречались в статистике. Зависимость между доходностью активов была учтена косвенно, через зависимость доходности активов от внешнего фактора. Данный вариант неплохо отражает действительность, если в качестве фактора берется, например, индекс акций в базу расчета которого входят анализируемые акции.

Таким образом, мы смогли восстановить порядка 70 % вероятностей состояний портфеля, которые в случае учета зависимости доходности активов между собой приняли нулевые значения.

3 Выбор и анализ риска портфеля ценных бумаг

3.1 Выбор оптимального портфеля по *LP-PRAM* и анализ риска

Методика выбора оптимального портфеля по *LP-PRAM* и вычислительные алгоритмы изложены в работах [6,7]. При оптимизации подбираются оптимальные доли активов в портфеле по одному из критериев оптимизации.

Критерии оптимизации. В качестве целевой функции для решения задачи оптимизации используется один из критериев:

1) Максимизация минимально допустимой доходности портфеля, при заданном уровне риска:

$$Y_{ad} \;\to\; max;\; Risk \;=\; const. \tag{12}$$

где Y_{ad} - допустимая доходность портфеля активов для заданного риска $Risk$;

2) Минимизация риска при заданной допустимой доходности:

$$Risk \;\to\; min;\; Y_{ad} \;=\; const. \tag{13}$$

Анализ риска. Сформулируем задачу анализа риска портфеля по *LP-PRAM*. Пусть оптимальный портфель построен и известны относительные доли капитала $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ вложенного в каждый актив 1, 2, ..., n. Тогда вклады событий-градаций активов в допустимую доходность портфеля Y_{ad} равны:

$$D_{jr} = N_{jr}\ /\ N_{ad}; j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ r = 1,\ 2,\ \ldots,\ N_j, \tag{14}$$

где N_{ad} и N_{jr} - число состояний портфеля в "хвосте"распределения и число состояний портфеля, содержащих градацию r актива j, удовлетворяющих условию:

$$Y < Y_{ad}, \tag{15}$$

вклады событий-градаций в $Risk$ равны:

$$C_{jr} = P_{jr}/Risk,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ r = 1,\ 2,\ \ldots,\ N_j, \tag{16}$$

где P_{jr} - суммарная вероятность состояний портфеля с градацией r актива j, удовлетворяющих условию (15).

Исходя из приведенных выражений могут быть вычислены вклады группы градаций для одного или разных активов. Градации или их группы, которые имеют наибольшие вклады являются индикаторами, показывающими возможность разорения клиента. Эти вклады указывают на градации тех финансовых инструментов, которые наиболее опасны в портфеле и на которые следует обращать особое внимание при прогнозировании риска получения убытков. Они могут использоваться в целях мониторинга за состоянием портфеля и существенно расширяют возможности анализа и управления риском портфеля ценных бумаг.

3.2 Примеры оптимизации и анализа риска портфеля

Для целей исследования была сформирована выборка значений дневной доходности по 3 акциям российских компаний: РАО ЕЭС, ЛУКОЙЛ и Сбербанк, с октября 2002 по сентябрь 2004 года. Доходность рассчитывалась без учета дивидендных выплат.

Таблица 13. Описательные статистики

	Мат. ожидание	Мин	Макс	Ст. отклонение	Дисперсия
РАО ЕЭС	0.256	-10.108	9.533	2.848	8,113
ЛУКОЙЛ	0.129	-7.319	11.570	2.123	4,508
Сбербанк	0.184	-8.849	9.279	2.000	4,002
индекс РТС	0.128	-10.062	10.096	1.823	3.324

По полученным статистикам анализируемых акций (Таблица 13) можно сделать вывод, что все активы имеют положительное математическое ожидание, оно изменялось в диапазоне от 0,129 до 0,256. Это объясняется преимущественно положительной ценовой динамикой на российские акции в этот период на фоне достаточно высокой волатильности цен. Положительная доходность за один торговый день по анализируемым акциям достигала 11,57 % , а отрицательная -10,1 %. Такая рыночная конъюнктура характеризовалась высокими значениями стандартных отклонений доходности, которые изменяются в диапазоне от 2 до 2,84 по анализируемым акциям.

Таблица 14. Матрица корреляций

РАО ЕЭС	1.000	0.566	0.465	0.303
ЛУКОЙЛ	0.566	1.000	0.592	0.434
Сбербанк	0.465	0.592	1.000	0.369
индекс РТС	0.303	0.434	0.369	1.000

Исходя из анализа корреляций, можно сделать вывод о достаточно сильной положительной связи доходности акций между собой. Это объясняется узостью российского фондового рынка, спрос на котором сосредоточен в основном на акции нефтегазовой отрасли и электроэнергетики, что и определяет динамику рынка.

Сформируем портфель из анализируемых акций. Состояния доходности портфеля моделировались для случая независимой и зависимой доходности активов, а также для случая зависимой от внешнего фактора доходности активов. Проведем оптимизацию портфеля с целью определения оптимальных долей акций в портфеле x_1, x_2, x_3, максимизируем допустимую доходность при заданном уровне риска. Проведем анализ риска портфеля для случая зависимой от внешнего фактора доходности активов. Вычислим вклады событий-градаций, попавших в хвост распределения доходности оптимального портфеля, в риск и допустимую доходность Y_{ad}. Приведем ниже результаты этих исследований.

Результаты оптимизации для трех случаев иллюстрируют различие в методах моделирования состояний доходности портфеля. В случае моделирования независимой доходности активов мы имеем ненулевые вероятности всех возможных состояний доходности портфеля, отсюда и легкий процесс оптимизации на всех состояниях доходности. В случае же зависимой доходности активов, вероятности состояний портфеля определяются из статистики, в которой далеко не всегда встречаются все из возможных состояний доходности, как следствие встречается множество нулевых вероятностей. В результате процесс оптимизации затрудняется. Решением данной проблемы видится авторами данной статьи в построении логической функции описывающей все состояния портфеля. В третьем случае логической функцией задана зависимость доходности активов от внешнего фактора. Преимущество заключается в

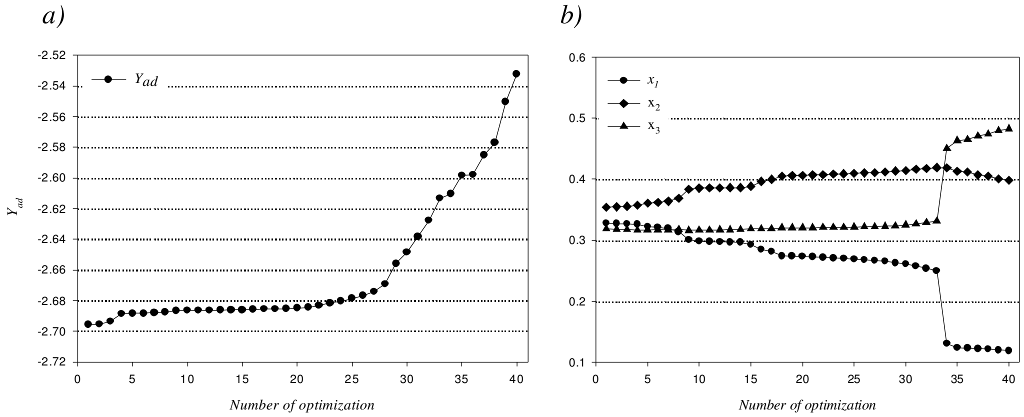

Рис. 4: Процесс оптимизации (независимые доходности): a) Y_{ad}, b) x_1, x_2, x_3

Таблица 15. Результаты оптимизации (независимые доходности)

	x_1	x_2	x_3	Y_{ad}	N_{ad}	$Risk$
До	0.333	0.333	0.333	-2.695	263	0.2
После	0.118	0.398	0.482	-2.532	271	0.2

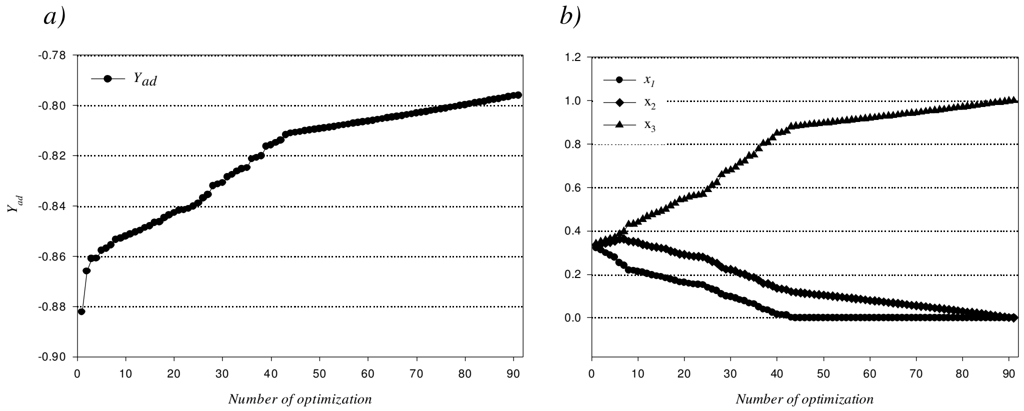

Рис. 5: Процесс оптимизации (зависимые доходности): a) Y_{ad}, b) x_1, x_2, x_3

Таблица 16. Результаты оптимизации (зависимые доходности)

	x_1	x_2	x_3	Y_{ad}	N_{ad}	$Risk$
До	0.333	0.333	0.333	-0.882	522	0.2
После	0.000	0.000	1.000	-0.796	513	0.2

Таблица 17. Результаты оптимизации (доходности, зависимые от фактора)

	x_1	x_2	x_3	Y_{ad}	N_{ad}	$Risk$
До	0.333	0.333	0.333	-1.472	441	0.2
После	0.112	0.486	0.400	-1.074	451	0.2

том, что в виде логической функции могут быть заданы произвольные зависимости, как между доходностью активов, так и от внешних факторов. Это позволяет более гибко подойти к проблеме зависимости исходных данных, а также решить вопрос с ограниченным размером

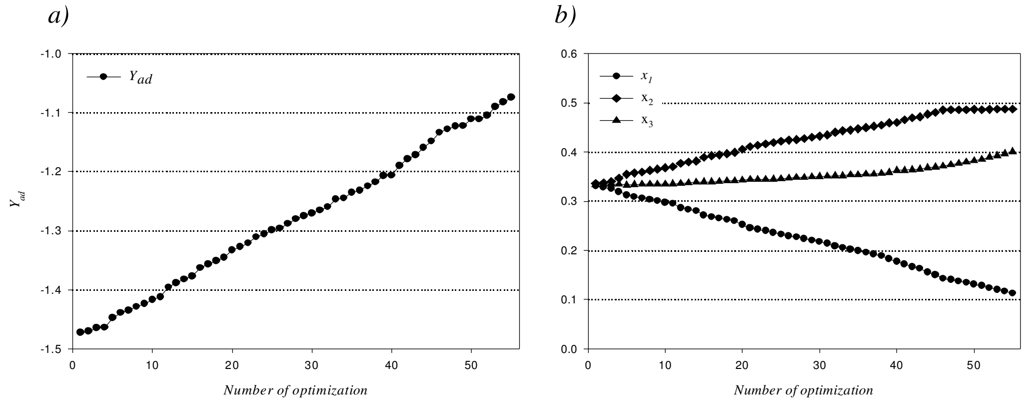

Рис. 6: Процесс оптимизации (доходности, зависимые от фактора): a) Y_{ad}, b) x_1, x_2, x_3

статистики для управления риском портфеля ценных бумаг.

Анализ риска портфеля по *LP-PRAM*. Определим вклады событий-градаций в риск и допустимую доходность портфеля из трех акций для случая зависимой от внешнего фактора доходности акций РАО ЕЭС, ЛУКОЙЛ и Сбербанк (индекс РТС). В Таблице 18 приведены расчеты для оптимального портфеля: $x_1 = 0.112$, $x_2 = 0.486$, $x_3 = 0.400$, $Risk = 0.2$. Средние доходности акций на интервалах обозначены как Y_{jm}.

Таблица 18. Вклады событий-градаций в "хвост"распределения

J	Y_{1m}	C_{1r}	D_{1r}	Y_{2m}	C_{2r}	D_{2r}	Y_{3m}	C_{3r}	D_{3r}
1	-10.100	0.020	0.109	0.000	0.000	0.000	-9.670	0.020	0.261
2	-8.220	0.039	0.109	-8.850	0.020	0.239	-8.450	0.020	0.239
3	-6.950	0.176	0.087	-6.230	0.059	0.239	-5.890	0.059	0.239
4	-4.930	0.098	0.087	-4.640	0.098	0.239	-4.340	0.390	0.109
5	-2.710	0.255	0.087	-2.680	0.824	0.239	-2.310	0.491	0.130
6	-0.840	0.235	0.087	-0.790	0.000	0.043	-0.560	0.020	0.022
7	0.780	0.137	0.087	0.820	0.000	0.000	0.910	0.000	0.000
8	2.860	0.020	0.087	2.760	0.000	0.000	2.590	0.000	0.000
9	4.940	0.020	0.087	4.810	0.000	0.000	4.780	0.000	0.000
10	6.700	0.000	0.087	7.010	0.000	0.000	6.890	0.000	0.000
11	8.660	0.000	0.087	9.030	0.000	0.000	9.300	0.000	0.000

Вклады C_{jr} и D_{jr} событий-градаций в хвост ведут себя по-разному. Если вклады событий-градаций в доходность D_{jr} монотонно уменьшаются с ростом доходности градаций или уменьшаются, а затем становятся равными нулю для остальных градаций, то вклады событий-градаций C_{jr} в риск имеют экстремум.

Наиболее опасными по вкладам C_{jr} в риск портфеля являются события-градации РАО ЕЭС под номерами 3, 5, 6 и 7, событие-градация ЛУКОЙЛа под номером 5 и события-градации Сбербанка под номером 4, 5. Наиболее опасными по вкладам D_{jr} в доходность портфеля являются события-градации РАО ЕЭС под номерами 1, 2, события-градации ЛУКОЙЛа под номерами 2, 3, 4, 5 и градации Сбербанка под номерами 1, 2, 3. Градации этих акций вносят ощутимый вклад в риск и допустимую доходность всего портфеля.

4 Энтропия доходности как характеристика "хвоста"

Степень неоднородности или разнообразия множеств каких-либо элементов (событий, сигналов, состояний) зависит от общего числа элементов, входящих в данное множество, от числа различных элементов и их плотности в данном множестве [9]. Плотности различных элементов задаются обычно вероятностью получить элемент данного вида при случайной выборке из данного множества. Для измерения разнообразия множества в кибернетике служит энтропия данного множества элементов A , определяемая по выражению (17).

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{N} P_i \cdot \ln P_i = 1, \tag{17}$$

где: $H(A)$ - энтропия множества A, P_i - вероятность появления i-го элемента при случайной выборке из множества A; суммирование производится по всем элементам полного множества элементов:

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = 1.$$

Применительно к портфелю ценных бумаг элементами множества A являются состояния доходности портфеля. Другими словами энтропия доходности портфеля является характеристикой его распределения и измеряет разнообразие или неопределенность состояний доходности. Она характеризует риск портфеля в качестве меры неопределенности получить конкретное значение доходности. И здесь кроется большой потенциал использования энтропии применительно к проблеме выбора ценных бумаг и анализа риска портфеля.

Наряду с использованием энтропии как характеристики распределения доходности портфеля, она может выступать и как характеристика не всего распределения, а лишь его части, т.н. "хвоста"распределения. Исходя из свойства аддитивности энтропии, мы можем вычислить ее величину только для значений доходности, которые попадают в "хвост"распределения портфеля. Обозначим эту энтропию как H_{ad} и будем в дальнейшем называть ее энтропией доходности "хвоста"распределения. Это величина является мерой риска портфеля и прямо пропорциональна параметру $Risk$.

Использование характеристики $Risk$ и H_{ad} при их эквивалентности дополняет анализ риска хвоста распределения, поскольку $Risk$ измеряет величину вероятности получения дохода (убытков) ниже (выше) допустимого уровня, а H_{ad} степень неопределенности поведения "хвоста"распределения.

5 Оценка эффективности управления портфелем по *LP-PRAM*

Методика *LP-PRAM* перед началом нового торгового периода оптимизирует инвестиционный портфель на базе данных по доходности активов за предыдущие периоды. Приведем алгоритм управлением инвестиционным портфелем по методике *LP-PRAM*:

1. Моделирование состояний инвестиционного портфеля на базе данных по доходности ценных бумаг за соответствующий период времени;
2. Оптимизация портфеля на период T в соответствии с выбранным критерием оптимизации;
3. Учет периода T в статистике и моделирование состояний портфеля с учетом обновленной статистики;

4. Оптимизация портфеля на период $(T+1)$ в соответствии с критерием оптимизации (и так далее, на протяжении всего периода управления инвестиционным портфелем).

Для оценки эффективности управления портфелем по методике *LP-PRAM* анализировались данные по дневной доходности акций: РАО ЕЭС, ЛУКОЙЛ, Сбербанк, с сентября 2002 по сентябрь 2004 года. На основе данных с сентября по октябрь 2004 года оценивалась и сравнивалась стоимость портфелей, включающих акции в равных долях и акции, чьи доли в портфеле изменялись каждый день в соответствии с предложенной методикой *LP-PRAM*. В рассматриваемом примере оценка эффективности методики производилось на данных, которые не входили в статистику на стадии моделирования состояний портфеля. Оптимальные доли акций в портфеле вычислялись исходя из задачи оптимизации (12). В процессе управления портфелем мы удерживали постоянным риск портфеля на уровне $Risk = 0.05$.

a) *b)* *c)*

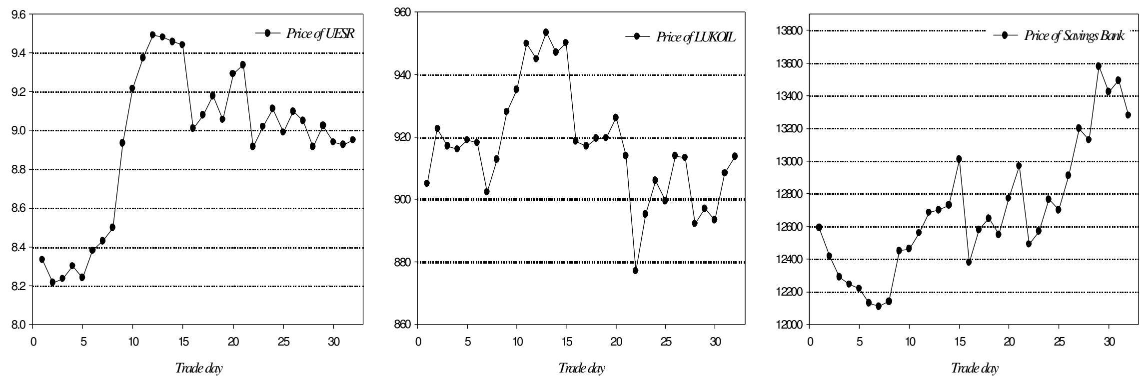

Рис. 7: Динамика цен на акции в период с сентября по октябрь 2004: a - РАО ЕЭС, b - ЛУКОЙЛ, c - Сбербанк

За тестовый период цены акций вели себя по-разному, поэтому интуитивно понятно, что их адаптация в портфеле может обеспечить результат лучше, чем поддержание равных долей акций в течение всего тестового периода.

Рисунок 8 подтверждает эффективность применения методики *LP-PRAM* в тестовый период. Стоимость портфеля в процессе управления по *LP-PRAM* превысила стоимость портфеля, в который входили акции в равных долях. В Таблице 19 приведены результаты управления инвестиционными портфеля в тестовый период.

Таблица 19. Результаты управления портфелем с сентября по октябрь 2004 года

случай	CA, сентябрь 2004	CA, октябрь 2004	Торговый оборот	Комиссия, 0.08%	Чистая прибыль	Доход за период, %	Profit / Max loss
Equal shares	$ 1000 000	$ 1 046 793	2 046 794	1637	45 156	4.51	0.99
LP-PRAM	$ 1000 000	$1 071 228	4 789 290	3831	67 397	6.74	1.51

В процессе оценки эффективности методики *LP-PRAM* были также учтены операционные затраты, плата за совершение операций на рынке ценных бумаг, что очень важно для обоснования результатов активного управления инвестиционным портфелем. Коэффициент "Profit / Max loss"вычислялся как отношение чистой прибыли от инвестиций к мак-

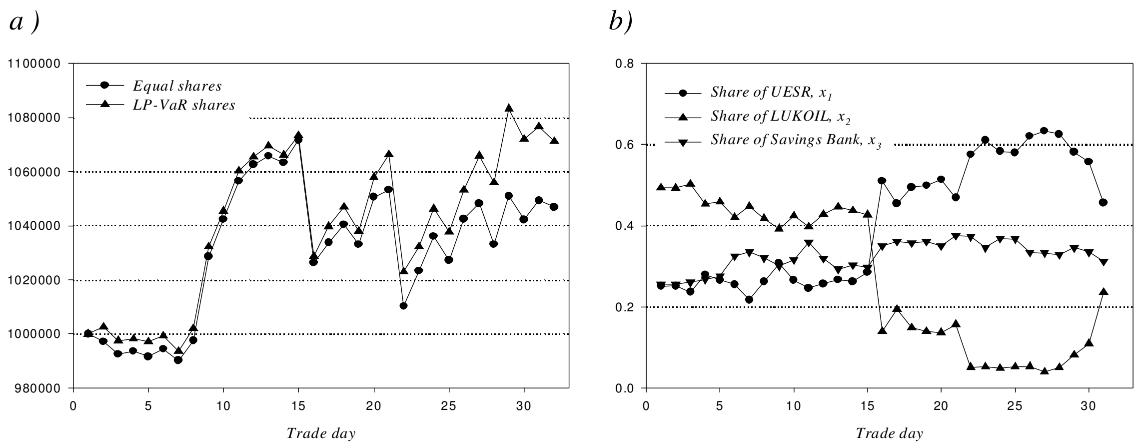

Рис. 8: а) Сравнительный график изменения стоимости портфеля, b) Динамика долей акций в процессе управления по *LP-PRAM*

симальному снижению стоимости активов за тестовый период. По данному критерию наша методика показала существенное увеличение прибыли по отношению к максимальному снижению капитала. В результате активного управления инвестиционным портфелем была обеспечена повышенная доходность при фиксированном риске инвестиций $Risk = 0{,}05$.

Заключение.

По результатам выполненных исследований, развивающих идеи работ [6, 7, 11], можно сделать следующие выводы:

1. Выбор портфеля ценных бумаг по Марковицу и *VaR* имеет следующие недостатки: 1) принимается нормальность законов распределения доходности активов и портфеля, что снижает горизонт прогнозирования риска портфеля до нескольких дней и недель, 2) непрозрачность анализа и прогнозирования риска.
2. Изложены основные положения ЛВ-теория риска портфеля ценных бумаг *LP-PRAM*, использующей произвольные дискретные распределения и связи доходности акций, что позволяет обеспечить прозрачность результатов на основе увеличения горизонта прогнозирования и решать новые задачи анализа и прогнозирования риска портфеля.
3. Благодаря введению ортогональной логической функции было восстановлено порядка 70% вероятностей тех состояний портфеля, которые не встречались в статистике. Зависимость между доходностью активов была учтена косвенно, через зависимость доходности активов от внешнего фактора.
4. Введена энтропия доходности портфеля, заменяющая описание многомерного распределения и удобная для анализа "хвоста".
5. Расчетные исследования на реальных данных подтвердили эффективность положений теории и технологии *LP-PRAM* и ее прозрачность при анализе и управлении риском портфеля ценных бумаг при произвольных распределениях доходности.

Список литературы

[1] Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж. Инвестиции. М.: ИНФРА, 2001

[2] Энциклопедия финансового риск-менеджмента / Под ред. А.А.Лобанова и А.В.Чугунова.-М: Альпина Паблишер, 2003.-786 с.

[3] Uryasev S., Rockafellar R. T. Conditional value-at-risk for general loss distributions // Journal of Banking & Finance, 2002. N 26. P. 1443-1471.

[4] Barone-Adesi G., Giannopoulos K., Vosper L. Backtesting Derivative Portfolios with Filtered Histirical Simulation // European Financial Management, 2002. No 8. P. 31-58.

[5] Giannopoulos K. *VaR* modelling on long run horizons // Proc. of Int. Scien. School "Modelling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems", 2002. July 2-5. St. Petersburg: Business Press, 2002.

[6] Solojentsev E. D., Alekseev V.V. Logic and probabilistic theory of security portfolio risk // Proc. of the Int. Scien. School "Modelling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems", 2003. August 20-23. St. Petersburg: SPUASE, 2003.

[7] Solojentsev E. D. Scenario Logic and Probabilistic Management of Risk in Business and Engineering. Springer: 2004, 391 p.

[8] Nikolai V. Hovanov, James W. Kolari, Mikhail V. Sokolov. Computing currency invariant indices with an application to minimum variance currency baskets // Journal of Economic Dynamics and Control, 28 (2004) 1481-1505.

[9] Ю.Б.Гук, Э.А.Лосев, А.В.Мясников. Оценка надежности электроустановок. Изд-во Энергия, М., 1974, с.200

[10] А.Я.Хинчин. Понятие энтропии в теории информации.-"УМН", 1953, т.8, вып. 3(55), с.3-20.

[11] Рябинин И. А. Надежность и безопасность структурно-сложных систем. СПб.: Политехника 2000.